Une approche intrinsèque des observateurs linéaires à entrées inconnues

Jamal DAAFOUZ[1], Michel FLIESS[2], Gilles MILLERIOUX[3]

[1] INPL, CRAN (UMR CNRS-INPL-UHP 7039), ENSEM, 2 av. de la Forêt de Haye, 54516 Vandœuvre-lès-Nancy, France

[2] Projet ALIEN, INRIA Futurs & Équipe MAX, LIX (UMR CNRS 7161), École polytechnique, 91128 Palaiseau, France

[3] UHP, CRAN (UMR CNRS-INPL-UHP 7039), ESSTIN, 2 rue Jean Lamour, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France

Jamal.Daafouz@ensem.inpl-nancy.fr, Michel.Fliess@polytechnique.edu, Gilles.Millerioux@esstin.uhp-nancy.fr

Résumé— **On donne des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'observateurs à entrées inconnues, pour les systèmes linéaires invariants, à temps continu ou discret. Une structure générique valable quel que soit le degré relatif du système est alors proposée en monovariable, qui peut être étendue au multivariable. Deux exemples, dont l'un avec simulations numériques, sont examinés.**

Mots-clés— **Systèmes linéaires, observateurs, reconstructeurs, inversibilité, zéros invariants, platitude, modules.**

I. Introduction

La recherche d'observateurs linéaires, en temps continu ou discret, à entrées inconnues a suscité ces dernières années une abondante littérature, en raison d'applications potentielles dans divers domaines, comme le diagnostic ou la cryptographie. Des méthodes spécifiques doivent, alors, être introduites. On rappelle ci-dessous quelques-uns des articles les plus marquants.

Une première solution peut être envisagée lorsque les quantités inconnues satisfont une dynamique connue. On définit alors un système augmenté et un observateur estime le vecteur d'état étendu (*cf.* [29], [31], [32]). Quand cette dynamique est inconnue, on doit faire appel à des observateurs, dits à entrées inconnues. De nombreux algorithmes emploient des observateurs réduits. Un algorithme de reconstruction, basé sur l'approche géométrique, a été proposé pour la première fois en [27], fournissant des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de l'observateur associé. Notons que ce type d'approche a été également utilisé en [1] dans un contexte un peu plus général. On propose en [45] une procédure simple pour construire l'observateur en présence de perturbations non mesurables, mais sans aucune condition d'existence et avec un point de vue « essai - erreur ». La solution constructive de [33], basée sur les inverses généralisées matricielles, s'exprime en termes de rang des matrices d'état. Ces conditions prennent en compte les zéros invariants et traduisent le fait que le système doit être à déphasage minimal. La construction plus simple de [36] repose aussi sur les inverses généralisées matricielles. Les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un observateur réduit en [30] traduisent des propriétés d'observabilité ou de détectabilité.

Venons-en aux observateurs non réduits. La procédure simple de [46] indique la moins bonne performance en convergence des observateurs réduits, car une partie de la dynamique de reconstruction est imposée. Ces conditions, reprises et détaillées en [9], se traduisent en termes similaires à ceux proposés en [30] pour les observateurs réduits.

Notons que l'inversion des systèmes linéaires invariants a été traitée depuis longtemps de façon indépendante. Les premières études sur l'existence d'un système inverse et sa construction datent de 1965 pour le cas monovariable [6], [7] et de 1966 pour le multivariable [47]. Les conditions d'existence ont été ensuite exprimées en termes simplifiés et constructifs en [41] : on y établit des conditions d'existence d'un système appelé *L-integral inverse*, dont la sortie reproduit l'entrée à une chaîne de L-intégrateurs près. Ajoutons que ces résultats s'étendent au multivariable et au temps discret. Une condition similaire est établie à la même époque et indépendamment en [42]. Le test d'inversibilité et la construction de l'inverse y dérivent d'une procédure séquentielle.

Plusieurs faits en ressortent :

1. La plupart des contributions sur les observateurs à entrées inconnues ne considèrent que les systèmes de degré relatif 1 car une structure restrictive d'observateur est imposée.

2. Il est paradoxal que peu de travaux[1] établissent un lien direct entre structure et conditions d'existence d'un observateur à entrées inconnues et propriétés du système inverse.

Cette communication propose une approche intrinsèque des observateurs à entrées inconnues. Son but essentiel est une condition nécessaire et suffisante d'existence de tels observateurs, qui s'écrit : *Un système linéaire invariant possède un observateur à entrées inconnues si, et seulement si, il est inversible à gauche et à déphasage minimal.* Pour les observateurs en temps fini, on se ramène à une condition nécessaire et suffisante, analogue à la caractérisation des sorties plates. On obtient au § IV une structure générique d'observateurs monovariables à entrées inconnues quel que soit degré relatif. L'exemple, avec simulations numériques,

[1] Mentionnons toutefois [26]. L'existence y est formulée à partir des conditions de rang de la fonction de transfert et donc à partir de l'inverse. Le gain de l'observateur est calculé afin d'obtenir une dynamique de reconstruction en temps fini. L'excellent aperçu de [9] (voir, aussi, [8]), qui fournit une procédure simple et efficace de synthèse d'observateurs à entrées inconnues, se limite au degré relatif 1.

du § V ébauche une généralisation au multivariable. Le principal outil mathématique est la théorie des modules telle qu'elle a été employée depuis [12] : elle est rappelée au § II. Les résultats structurels fondamentaux sont exposés au § III, sans démonstrations détaillées par manque de place. La conclusion du § VI évoque brièvement des pistes futures.

II. Modules et systèmes linéaires

A. Modules

Soient k un corps commutatif, qui sera, en général, le corps $\mathbb{R}$ des réels, et $k[\sigma]$ l'anneau principal des polynômes sur k, en l'indéterminée σ. Un $k[\sigma]$-*module*[2] $\mathfrak{M}$ est un k-espace vectoriel tel que $\sigma : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ soit un endomorphisme k-linéaire. Tous les modules ci-dessous sont finiment engendrés.

Un élément $\xi \in \mathfrak{M}$ est dit de *torsion* si, et seulement si, il existe $\pi \in k[\sigma]$, $\pi \neq 0$, tel que $\pi\xi = 0$. L'ensemble des éléments de torsion forme un sous-module $\mathfrak{M}^{\text{tor}} \subseteq \mathfrak{M}$, dit *sous-module de torsion*. Si $\mathfrak{M}^{\text{tor}} = \mathfrak{M}$, on dit que $\mathfrak{M}$ est de *torsion*. Si $\mathfrak{M}^{\text{tor}}$ est trivial, c'est-à-dire $\mathfrak{M}^{\text{tor}} = \{0\}$, on dit que $\mathfrak{M}$ est *sans torsion*. On dit que $\mathfrak{M}$ est *libre* si, et seulement si, il admet une *base*, c'est-à-dire un ensemble générateur, formé d'éléments $k[\sigma]$-linéairement indépendants. La cardinalité d'une telle base est le *rang* de $\mathfrak{M}$.

Les définitions et propriétés suivantes sont primordiales :

1. Les classes des modules libres et sans torsion coïncident.

2. Le module $\mathfrak{M}$ est de torsion si, et seulement si, sa dimension en tant que k-espace vectoriel est finie, c'est-à-dire $\dim_k(\mathfrak{M}) < +\infty$. Le *spectre* d'un module de torsion $\mathfrak{M}$ est, par définition, le spectre de σ, considérée comme endomorphisme k-linéaire de $\mathfrak{M}$, sur la clôture algébrique $\bar{k}$ de k.
3. Tout module $\mathfrak{M}$ se décompose ainsi :

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{\text{libre}} \oplus \mathfrak{M}^{\text{tor}}$$

où $\mathfrak{M}^{\text{libre}} = \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^{\text{tor}}$ est un module libre, défini à un isomorphisme près. Le rang de $\mathfrak{M}$, noté $\text{rg}(\mathfrak{M})$, est, par définition, celui de $\mathfrak{M}^{\text{libre}}$. Le rang de $\mathfrak{M}$ est donc nul si, et seulement si, $\mathfrak{M}$ est de torsion.

Soit $k(\sigma)$ le corps de fractions de $k[\sigma]$, c'est-à-dire le corps des fractions rationnelles sur k en l'indéterminée σ. Le $k(\sigma)$-espace vectoriel $\hat{\mathfrak{M}} = k(\sigma) \otimes \mathfrak{M}$ est appelé *espace de transfert* [14] de $\mathfrak{M}$. Le noyau de l'application $k[\sigma]$-linéaire $\mathfrak{M} \to \hat{\mathfrak{M}}$, $\xi \mapsto \hat{\xi} = 1 \otimes \xi$, est $\mathfrak{M}^{\text{tor}}$. On démontre les faits suivants :

- la famille $\{\xi_\iota \mid \iota \in I\} \subset \mathfrak{M}$ est $k[\sigma]$-linéairement (in)dépendante si, et seulement si, $\{\hat{\xi}_\iota \mid \iota \in I\} \subset \hat{\mathfrak{M}}$ est $k(\sigma)$-linéairement (in)dépendante ;
- la dimension de $\hat{\mathfrak{M}}$ est égale au rang de $\mathfrak{M}$.

B. Temps continu

Ici, $\sigma = \frac{d}{dt}$. Un *système* (*linéaire*), à temps continu, est un $k[\frac{d}{dt}]$-module Λ. Une *dynamique* (*linéaire*) est un système linéaire Λ muni d'une commande $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m) \subset \Lambda$, telle que le module quotient $\Lambda/\text{span}_{k[\frac{d}{dt}]}(\mathbf{u})$ soit de torsion.

On suppose désormais la commande *indépendante*, c'est-à-dire $u_1, \ldots, u_m$ $k[\frac{d}{dt}]$-linéairement indépendants. Un *système* (*linéaire*) *entrée-sortie* est une dynamique linéaire Λ munie d'une sortie $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p) \subset \Lambda$.

Remarque 1 Que l'on nous permette de rappeler que cette approche, née en [12], a permis les avancées suivantes[3] *:*

- *définition intrinsèque [12] de la commandabilité, à l'origine de la platitude [17] (voir aussi [40], [43]), et de l'observabilité ;*
- *représentations généralisées d'état [12] ;*
- *simplification [14] des liens entre approche polynômiales et par matrices de transfert ;*
- *dualité entre commandabilité et observabilité [39] ;*
- *pôles et zéros, finis ou non [4], [5] ;*
- *inversion entrée-sortie et son application aux bouclages* quasi-statiques *dans diverses synthèses classiques [10], [11] ;*
- *comportement impulsif [3] ;*
- *pousuite de modèles [35] ;*
- *approche « naturelle » de la commande prédictive [18], [19] ;*
- *correcteurs proportionnels intégraux généralisés [20] ;*
- *estimations paramétriques en boucle fermée [21] ;*
- *diagnostic [16].*

Soient $k(s)$, $s = \frac{d}{dt}$, le corps de fractions de $k[\frac{d}{dt}]$ et $\hat{\Lambda} = k(s) \otimes \Lambda$ l'espace vectoriel de transfert. L'application $\Lambda \to \hat{\Lambda}$, $\lambda \mapsto \hat{\lambda} = 1 \otimes \lambda$, s'appelle *transformation de Laplace formelle* [14]. Il vient pour le système entrée-sortie :

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_p \end{pmatrix} = T(s) \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_m \end{pmatrix}$$

où $T(s) \in k(s)^{p \times m}$ est la *matrice de transfert*.

Rappelons les faits suivants :

1. Le système Λ est *commandable* si, et seulement si, le module Λ est libre. Toute base du module libre est appelée *sortie plate*, ou *basique*.

2. Le système entrée-sortie Λ est *observable* si, et seulement si, $\Lambda = \text{span}_{k[\frac{d}{dt}]}(\mathbf{u}, \mathbf{y})$. C'est dire que l'observabilité équivaut à la possibilité d'exprimer toute variable du système, et, en particulier, toute variable d'état comme combinaison k-linéaire des composantes de la commande, de la sortie et de leurs dérivées jusqu'à un ordre fini.

3. Le système entrée-sortie est *inversible* à *gauche* (resp. à *droite*) si, et seulement si, sa matrice de transfert l'est. Ces deux propriétés sont équivalentes pour un système *carré*, c'est-à-dire où $m = p$. On dit, alors, qu'il y a *inversibilité*.

4. Le système entrée-sortie Λ est inversible à gauche si, et seulement si, le module quotient $\Lambda/\text{span}_{k[\frac{d}{dt}]}(\mathbf{y})$ est de torsion. Alors, les éléments du spectre de la *dynamique des zéros*, c'est-à-dire du module de torsion $\text{span}_{k[\frac{d}{dt}]}(\mathbf{u}, \mathbf{y})/\text{span}_{k[\frac{d}{dt}]}(\mathbf{y})$, sont appelés *zéros invariants*. Si $k = \mathbb{R}$, on dit que le système est à *déphasage minimal* si, et seulement si, les parties réelles des zéros invariants sont strictement négatives.

Nous nous limiterons, ici, à la représentation d'état

[2] Le cours [2] contient une excellente présentation de cette approche des systèmes linéaires et des outils mathématiques nécessaires. Renvoyons aussi à [34] pour une introduction à l'algèbre.

[3] Une grande partie des résultats ci-dessous restent valables dans le cas instationnaire, voire, grâce à l'algèbre différentielle, en non-linéaire.

usuelle[4] :

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} &= C\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1}
$$

où
- $A \in k^{n\times n}$, $B \in k^{n\times m}$, $C \in k^{p\times n}$;
- $\mathrm{rg}(B) = m$ et, donc, $m \le n$.

Rappelons que $n = \dim_k(\Lambda/\mathrm{span}_{k[\frac{d}{dt}]}(\mathbf{u}))$.

C. *Temps discret*

Posons $\sigma = \delta$, où δ est l'opérateur de retard : $\delta\phi(t) = \phi(t-1)$. On reprend[5] les définitions des systèmes, des dynamiques, des système entrée sortie, de la commandabilité, de la sortie plate, de l'observabilité, des matrices de transferts de l'inversion entrée-sortie, de la dynamique des zéros et des zéros invariants[6] du § II-B en substitutuant $k[\sigma]$ à $k[\frac{d}{dt}]$. Il convient, cependant, de noter que l'on obtient aussi des systèmes non causaux, comme $\delta y = u$, $y(t-1) = u(t)$. Une dynamique Λ est dite *causale* [13], ou *non anticipative*, si, et seulement si, δ est un automorphisme k-linéaire de $\Lambda/\mathrm{span}_{k[\delta]}(\mathbf{u})$, considéré comme k-espace vectoriel de dimension finie. Un système entrée-sortie est causal si, et seulement, la dynamique correspondante l'est.

L'analogue de (1) est, d'après [13], [19], la représentation d'état :

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= A\delta\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + B\delta\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} &= C\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2}
$$

où
- $A \in k^{n\times n}$, $B \in k^{n\times m}$, $C \in k^{p\times n}$, $D \in \delta k[\delta]^{p\times m}$;
- $\mathrm{rg}(B) = m$ et, donc, $m \le n$;
- $\det(A) \neq 0$.

Ici, encore, $n = \dim_k(\Lambda/\mathrm{span}_{k[\delta]}(\mathbf{u}))$.

Remarque 2 La condition $\det(A) \neq 0$, *étrangère aux approches usuelles* (cf. *[44]), est due au fait suivant : le système monovariable* $y(t) = u(t-\ell)$, $\ell \ge 1$, *possède une représentation d'état minimale de dimension* ℓ *dans les théories actuelles de la réalisation, et, ici, nulle (voir [13], [19]). Il en résulte de légères modifications par rapport au continu quant à certaines définitions, comme celles des pôles et des zéros.*

III. Observabilités à entrées inconnues

Désormais, $k = \mathbb{R}$.

A. *Temps continu*

A.1 Observabilité rapide à entrées inconnues

Le système (1) est dit *rapidement observable*, ou *observable en temps fini, à entrées inconnues* si, et seulement si,

$$x_i, u_j \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]}(\mathbf{y}) \qquad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m \tag{3}$$

c'est-à-dire si toute composante de l'état ou de la commande est combinaison $\mathbb{R}$-linéaire des composantes de la sortie et de leurs dérivées jusqu'à un ordre fini[7]. Ce qui suit est facile (voir, aussi, [25]) :

Proposition 1 *Le système (1) est rapidement observable à entrées inconnues si, et seulement si,* $\mathbf{y}$ *est un système générateur du module associé à (1). Alors, (1) est observable et inversible à gauche.*

Avec un système carré, cette propriété de la sortie conduit à la platitude :

Proposition 2 *Le système (1), supposé carré et commandable, est rapidement observable à entrées inconnues si, et seulement si,* $\mathbf{y}$ *est une sortie plate. Il est, alors, observable et inversible.*

A.2 Observabilité asymptotique à entrées inconnues

Commençons par nous placer dans la situation analytique élémentaire suivante : Les variables d'entrée, de sortie et d'état du système (1) s'expriment, pour t grand, sous forme de séries de $\sum_{\nu\ge 0}\alpha_\nu t^\nu$, $\alpha_\nu \in \mathbb{R}$. Nous dirons que (1) est *asymptotiquement observable à entrées inconnues* si, et seulement, toute composante de l'état s'exprime comme somme de deux séries :
- l'une dont les coefficients dépendent exclusivement des coefficients des développements en séries des composantes de la sortie,
- l'autre représentant une fonction tendant vers zéro lorque $t \to +\infty$.

On obtient la caractérisation suivante (comparer avec [28]) :

Théorème 3 *Le système (1) est asymptotiquement observable à entrées inconnues si, et seulement si, il est inversible à gauche et à déphasage minimal.*

Corollaire 4 *Le système (1), supposé asymptotiquement observable à entrées inconnues, est rapidement observable à entrées inconnues si, et seulement si, sa dynamique des zéros est triviale.*

B. *Temps discret*

B.1 Compléments théoriques

Il convient d'accepter les avances. Introduisons pour cela l'anneau principal $\mathbb{R}[\delta,\delta^{-1}]$ des polynômes de Laurent, c'est-à-dire des sommes finies $\sum_{\iota\in\mathbb{Z}} c_\iota\delta^\iota$, $c_\iota \in \mathbb{R}$, et le $\mathbb{R}[\delta,\delta^{-1}]$-module $\underline{\Lambda} = \mathbb{R}[\delta,\delta^{-1}] \otimes \Lambda$. Le noyau de l'application $\mathbb{R}[\delta]$-linéaire $\Lambda \to \underline{\Lambda}$, $\lambda \mapsto \underline{\lambda} = 1 \otimes \lambda$ est $\{\lambda \mid \exists\, \alpha \ge 1 \text{ tel que } \delta^\alpha\lambda = 0\}$. Nous ferons l'hypothèse naturelle qu'il est réduit à $\{0\}$: Λ peut être canoniquement considéré comme un sous-module de $\underline{\Lambda}$. Il en découle que la liberté de Λ equivaut à celle de $\underline{\Lambda}$. Alors, tout m-uplet d'éléments de Λ, qui est une base de $\underline{\Lambda}$, est appelé *sortie plate généralisée*.

[4]Voir [12] pour plus de détails.

[5]Renvoyons à [13], [19] pour davantage de détails.

[6]Si $k = \mathbb{R}$, le déphasage minimal équivaut au fait que les modules des zéros invariants sont strictement inférieurs à 1.

[7]Rappelons que, d'après le § II-B, l'observabilité usuelle de (1) s'exprime par

$$x_i \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]}(\mathbf{u},\mathbf{y}) \qquad i = 1,\ldots,n$$

B.2 Observabilité rapide à entrées inconnues

Le système (2) est dit *rapidement observable*, ou *observable en temps fini, à entrées inconnues* si, et seulement si, $x_i, u_j \in \text{span}_{\mathbb{R}[\delta,\delta^{-1}]}(\mathbf{y})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, c'est-à-dire si toute composante de l'état ou de la commande est combinaison $\mathbb{R}$-linéaire des composantes de la sortie et de leurs retards et avances jusqu'à un ordre fini (comparer avec (3)). Ce qui suit adapte les deux propositions du § III-A.1 (voir, aussi, [24]) :

Proposition 5 *Le système (2) est rapidement observable à entrées inconnues si, et seulement si,* $\mathbf{y}$ *est un système générateur du* $\mathbb{R}[\delta,\delta^{-1}]$*-module associé à (2). Alors, (2) est observable et inversible à gauche.*

Proposition 6 *Le système (2), supposé carré et commandable, est rapidement observable à entrées inconnues si, et seulement si,* $\mathbf{y}$ *est une sortie plate généralisée. Il est, alors, observable et inversible.*

B.3 Observabilité asymptotique à entrées inconnues

Adaptons le § III-A.2. Nous dirons que (2) est *asymptotiquement observable à entrées inconnues* si, et seulement, toute composante $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, de l'état s'exprime comme somme $a_i(t) + b_i(t)$ où :
- $a_i(t)$ dépend exclusivement d'un nombre fini de $y_j(\tau)$, $j = 1, \ldots, p$, $\tau \in \mathbb{Z}$,
- $b_i(t) \to 0$ si $t \to +\infty$.

On obtient la caractérisation suivante :

Théorème 7 *Le système (2) est asymptotiquement observable à entrées inconnues si, et seulement si, il est inversible à gauche et à déphasage minimal.*

Corollaire 8 *Le système (2), supposé asymptotiquement observable à entrées inconnues, est rapidement observable à entrées inconnues si, et seulement si, sa dynamique des zéros est triviale.*

IV. Détermination des observateurs

On propose une structure générique d'observateurs à entrées inconnues dans le cas monovariable valable quel que soit le degré relatif du système. On s'intéresse ensuite plus particulièrement au temps discret afin de mettre en évidence une spécificité liant des conditions de convergence en temps fini de l'observateur et la platitude utilisée dans les propositions 2 et 6. L'extension multivariable n'est pas détaillée ; un exemple est donné à titre illustratif au § V.

Remarque 3 Nous avons choisi d'exhiber des observateurs pour rester plus proche du point de vue dominant en automatique. Rappelons cependant que la définition de l'observabilité, donnée en [12], et les techniques d'estimation de [21] conduisent à des reconstructeurs d'états *[22], de nature non asymptotique et aux performances remarquables (voir [15] pour le traitement des bruits). Deux faits en découlent :*
- *La détermination de reconstructeurs à entrées inconnues est immédiate.*
- *La généralisation au non-linéaire est, à la différence des observateurs asymptotiques, aisée [23].*

A. Définition du degré relatif

Il existe trois définitions équivalentes du degré relatif d'un système linéaire monovariable :

i) le nombre de différenciations (resp. *d'itérations*) r nécessaires pour que u (resp. u_k) apparaisse de manière explicite au niveau de la sortie $y^{(r)}$ (resp. y_{k+r})

ii) la différence $r = n-q$ entre le degré du dénominateur $D(s)$ (resp. $D(z)$) et du numérateur (resp. $N(s)$) de la fonction de transfert $T(s)$ (resp. $T(z)$)

iii) le plus petit entier r tel que $CA^{r-1}B \neq 0$ et $CA^{s-1}B = 0$ pour $s < r$.

Dans le cas multivariable, une notion équivalente au degré relatif est l'ordre relatif [42].

B. Observateurs

On propose une structure générique d'un observateur à entrées inconnues pour un système de degré relatif $0 < r \leq n$. Dans le cas continu, l'observateur s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\hat{x}} & = & (PA - LC)\hat{x} + Qy^{(r)} + Ly \\ \hat{u} & = & (CA^{r-1}B)^{-1}(y^{(r)} - CA^r\hat{x}) \end{array} \right. \tag{4}$$

En discret, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \hat{x}_{k+1} & = & (PA - LC)\hat{x}_k + Qy_{k+r} + Ly_k \\ \hat{u}_k & = & (CA^{r-1}B)^{-1}(y_{k+r} - CA^r\hat{x}_k) \end{array} \right. \tag{5}$$

Les matrices Q et P vérifient :

$$Q = B(CA^{r-1}B)^{-1}, \qquad P = \mathbf{1}_n - QCA^{r-1} \tag{6}$$

Notons que $(CA^{r-1}B)^{-1}$ existe d'après la définition du degré relatif. Cette structure est directement inspirée de celle d'un système inverse. En effet, lorsque $L = 0$, on retrouve le système inverse donné dans [6] pour le cas temps continu ou dans [41] pour la cas temps discret (voir, aussi, [9] et [8]). Pour les systèmes linéaires, la matrice L n'a d'intérêt que dans un contexte stochastique pour assurer un filtrage de l'erreur de reconstruction.

C. Convergence

On considère les systèmes (1) ou (2) avec $D = 0$. En itérant (1) ou (2) et en tenant compte de *iii)* dans la définition du degré relatif, on obtient :

$$y^{(r)} = CA^r x + CA^{r-1}Bu \tag{7}$$

ou

$$y_{k+r} = CA^r x_k + CA^{r-1}Bu_k \tag{8}$$

Il vient :

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = (PA - LC)(x - \hat{x}) \tag{9}$$

$$u - \hat{u} = (CA^{r-1}B)^{-1}CA^r(x - \hat{x}) \tag{10}$$

ou

$$x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} = (PA - LC)(x_k - \hat{x}_k) \tag{11}$$

$$u_k - \hat{u}_k = (CA^{r-1}B)^{-1}CA^r(x_k - \hat{x}_k) \tag{12}$$

C.1 Observabilité asymptotique à entrées inconnues

La reconstruction asymptotique de u (resp. u_k) repose sur la convergence vers 0 de $u - \hat{u}$ (*resp.* $u_k - \hat{u}_k$), c'est-à-dire la convergence vers 0 de $x - \hat{x}$ (resp. $x_k - \hat{x}_k$). On peut aisément montrer, en raisonnant par exemple à partir d'une forme canonique compagne, que le polynôme caractéristique de $PA - LC$ s'écrit $\Phi(\lambda) = \Psi_L(\lambda^r) \cdot \Psi_b(\lambda^{n-r})$, où $\Psi_L(\lambda^r)$ un polynôme de degré r, à coefficients constants dépendant de L, et $\Psi_b(\lambda^{n-r}) = b_0 + \ldots + b_{n-r}\lambda^{n-r}$. Le spectre de $PA - LC$ noté $\sigma(PA - LC)$ vérifie donc :

$$\sigma(PA - LC) = \{\lambda_i\}_{i=1,\ldots,r} \cup \{\lambda_{ZI}\} \tag{13}$$

Les $\{\lambda_i\}$ sont les racines de Ψ_L ; les $\{\lambda_{ZI}\}$ sont celles de Ψ_b, c'est-à-dire les $n - r$ zéros invariants de (1). Les théorèmes 3 et 7 sont donc confirmés.

C.2 Observabilité rapide à entrées inconnues

L'observabilité rapide à entrées inconnues est une spécificité des systèmes à temps discret. La reconstruction en temps fini de u_k est assurée si $x_k - \hat{x}_k$ converge à 0 en temps fini. La matrice $PA - LC$ doit donc être nilpotente, c'est-à-dire $\Phi(\lambda) = \lambda^n$. Cela nécessite que $\Psi_L(\lambda^r) = \lambda^r$ et que $\Psi_b(\lambda^{n-r}) = \lambda^{n-r}$, ce qui implique que les zéros invariants du système sont tous nuls. On a alors $\sigma(PA - LC) = \{0\}^n$ et donc $(PA - LC)^n = \mathbf{0}$. D'après (11), $\hat{x}_{k+n} = x_{k+n}$ et en itérant (5), le vecteur reconstruit a pour expression :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+n} \quad = \quad & \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} (PA - LC)^{n-1-i} Q y_{k+r+i} + \\ & \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} (PA - LC)^{n-1-i} L y_{k+i} \end{aligned} \tag{14}$$

Si $\hat{x}_{k+n} = x_{k+n}$, l'entrée reconstruite vérifie $\hat{u}_{k+n} = u_{k+n}$ d'après (12). En itérant (5) et à l'aide de (14), l'entrée reconstruite a pour expression :

$$\begin{aligned} \hat{u}_{k+n} \quad = \quad & (CA^{r-1}B)^{-1} \big(y_{k+r+n} - \\ & CA^r \big(\textstyle\sum_{i=0}^{n-1} (PA - LC)^{n-1-i} Q y_{k+r+i} + \\ & \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} (PA - LC)^{n-1-i} L y_{k+i} \big)\big) \end{aligned} \tag{15}$$

Si les équations (14) et (15) sont vérifiées, cela signifie que la sortie y_k du système (1) est une sortie plate généralisée, les quantités s'écrivant comme des combinaisons linéaires des sorties retardées et/ou avancées. L'équation (15) n'est rien d'autre que la relation entrée/sortie du système (1). La Proposition 6 est bien vérifiée.

Remarque 4 Les solutions (14) et (15) sont en réalité indépendantes de L puisque $\hat{x}_{k+n} = x_{k+n}$ et $\hat{u}_{k+n} = u_{k+n}$ et que ni x_k, ni u_k de dépendent de L. Les solutions restent donc valables pour $L = 0$, c'est-à-dire lorsque l'observateur à entrées inconnues (5) se réduit à l'expression du système inverse. La dynamique de l'erreur de reconstruction se réduit quant à elle à la dynamique des zéros qui est triviale.

V. Exemple

A. Cas monovariable

Soit le système monovariable, à temps discret, défini par les matrices d'états :

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système est de degré relatif $r = 2$ si $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$ et b_3 quelconque. La fonction de transfert s'écrit :

$$G(z) = \frac{b_2 z + b_3}{z^3 + 4z^2 - 3z + 2}$$

Le polynôme caractéristique de $PA - LC$ avec $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}^T$ s'écrit :

$$\Phi(\lambda) = \underbrace{\left(-\frac{b_3}{b_2} - \lambda\right)}_{\Psi_b(\lambda^{n-r})} \underbrace{(\lambda^2 + l_1\lambda - 4l_1 + l_2)}_{\Psi_L(\lambda^r)}$$

Seule la stabilité des racines de ce polynôme est exigée pour une reconstruction asymptotique. On peut noter qu'elle implique à travers $\Psi_b(\lambda^{n-r})$ la stabilité des zéros invariant. En revanche, pour une reconstruction en temps fini, la matrice $PA - LC$ doit être nilpotente. Son spectre $\sigma(PA - LC) = \{0\}^3$, si $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, l_3 quelconque, $b_3 = 0$, correspondant au fait que le zéro invariant doit être nul. Le vecteur d'état reconstruit est donnée par (14) et s'écrit :

$$\hat{x}_{k+3} = \begin{pmatrix} y_{k+3} \\ 4y_{k+3} + y_{k+4} \\ -2y_{k+2} \end{pmatrix}$$

L'entrée reconstruite est déduite de (15) et s'écrit $b_2\hat{u}_{k+1} = y_{k+3} + 4y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k$. Ce n'est rien d'autre que la relation entrée/sortie du système. Notons à ce niveau que ces expressions de $\hat{x}_{k+3}$ et de $\hat{u}_{k+3}$ sont bien indépendantes de la matrice L comme indiquée dans la remarque 2. De même, elle montrent que la sortie y_k de ce système est bien une sortie plate.

B. Cas multivariable

On considère un système multivariable, carré et à temps discret caractérisé par les matrices d'états suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0 & -0.4 \\ 0.01 & 0.1 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0 & -1.5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

L'ordre relatif vaut 2 ; la dynamique des zéros est triviale.

Pour un gain L assurant une dynamique de reconstruction de spectre $\sigma(PA) = \{0, 0.5, 0.2, 0.8\}$, la convergence asymptotique à zéro de $x_k - \hat{x}_k$ et de $u_k - \hat{u}_k$ est illustrée respectivement sur les Figures 1A et 1B.

Pour un gain $L = 0$, la dynamique de l'erreur de reconstrution se réduit à la dynamique des zéros (voir remarque 4). La convergence en temps fini des erreurs $x_k - \hat{x}_k$ (Fig. 1C) et $u_k - \hat{u}_k$ (Fig. 1D) illustrent bien le corollaire 8 stipulant que le système est rapidement observable à entrées inconnues.

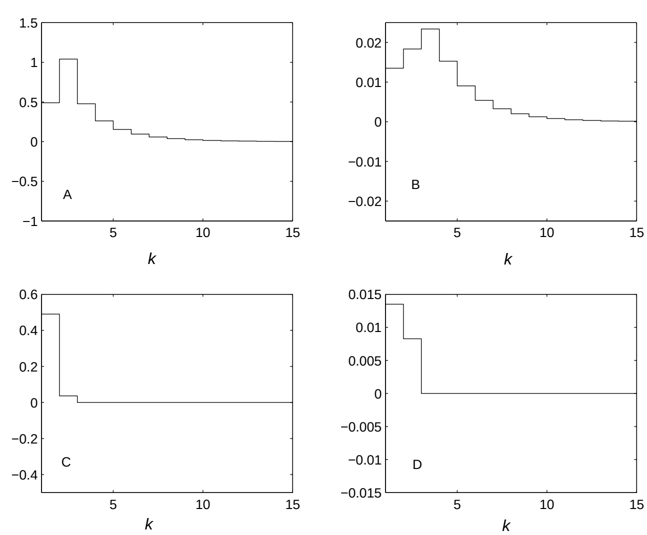

Fig. 1. Convergence asymptotique de $|x_k - \hat{x}_k|^2$ (A) et de $|u_k - \hat{u}_k|^2$ (B). Convergence en temps fini de $|x_k - \hat{x}_k|^2$ (C) et de $|u_k - \hat{u}_k|^2$ (D)

VI. Conclusion

Les techniques développées ici permettent une généralisation aisée de la plupart des résultats aux systèmes linéaires instationnaires ou à commutations, ainsi qu'aux systèmes non linéaires. Ce sera l'objet de prochaines publications qui développeront également le point de vue des *reconstructeurs*, évoqué dans la remarque 3 du § IV.

Références

[1] S.P. Bhattacharyya, « Observer design for linear systems with unknown inputs », *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 23, pp. 483-484, 1978.

[2] H. Bourlès, « Structural properties of discrete and continuous linear time-varying systems : A unified approach », *Advanced Topics in Control Systems Theory*, F. Lamnabhi-Lagarrigue, A. Loria, E. Panteley (Eds), Lect. Notes Control Informat. Sci., vol. 311, pp. 225-280, Springer, Berlin, 2005.

[3] H. Bourlès, « Impulsive systems and behaviors in the theory of linear dynamical systems », *Forum Math.*, vol. 17, pp. 781-807, 2005.

[4] H. Bourlès et M. Fliess, « Poles and zeros of linear systems : an intrinsic approach », *Internat. J. Control*, vol. 68, pp. 897-922, 1997.

[5] H. Bourlès et B. Marinescu, « Poles and zeros at infinity of linear time-varying systems », *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 44, pp. 1981-1985, 1999.

[6] R.W. Brockett, « Poles, zeros, and feedback : State space interpretation », *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 10, pp. 129-135, 1965.

[7] R.W. Brockett et M.D. Mesarovic, « The reproducibility of multivariable systems », *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 11, pp. 548-563, 1965.

[8] S-K. Chang, W-T. You et P-L. Hsu, « Design of general structured observers for linear systems with unknown inputs », *J. Franklin Inst.*, vol. 334, pp. 213-232, 1997.

[9] M. Darouach, M. Zazadinski et S.J. Xu, « Full-order observers for linear systems with unknown inputs », *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 39, pp. 606-609, 1994.

[10] E. Delaleau et P.S. Pereira da Silva, « Filtrations in feedback synthesis: Part I – systems and feedbacks », *Forum Math.*, vol. 10, pp. 147-174, 1998.

[11] E. Delaleau et P.S. Pereira da Silva, « Filtrations in feedback synthesis: Part II – input-output and disturbance decoupling », *Forum Math.*, vol. 10, pp. 259-276, 1998.

[12] M. Fliess, « Some basic structural properties of generalized linear systems », *Systems Control Lett.*, vol. 15, pp. 391-396, 1990.

[13] M. Fliess, « Reversible linear and nonlinear discrete-time dynamics », *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 37, pp. 1144-1153, 1992.

[14] M. Fliess, « Une interprétation algébrique de la transformation de Laplace et des matrices de transfert », *Linear Alg. Appl.*, vol. 203-204, pp. 429-442, 1994.

[15] M. Fliess, « Analyse non standard du bruit », *C.R. Acad. Sci. Paris, ser. I*, vol. 342, 2006 (accessible sur `http://hal.inria.fr/inria-00001134`).

[16] M. Fliess, C. Join et H. Sira-Ramírez, « Robust residual generation for linear fault diagnosis: an algebraic setting with examples », *Internat. J. Control*, vol. 77, pp. 1223-1242, 2004.

[17] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin et P. Rouchon, « Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples », *Internat. J. Control*, vol. 61, pp. 1327-1361, 1995.

[18] M. Fliess et R. Marquez, « Continuous-time linear predictive control and flatness: a module-theoretic setting with examples », *Internat. J. Control*, vol. 73, pp. 606-623, 2000.

[19] M. Fliess et R. Marquez, « Une approche intrinsèque de la commande linéaire discrète », *APII - J. europ. syst. autom.*, vol. 35, pp. 127-147, 2001.

[20] M. Fliess, R. Marquez, E. Delaleau et H. Sira-Ramírez, « Correcteurs proportionnels-intégraux généralisés », *ESAIM Control Optim. Calc. Variat.*, vol. 7, pp. 23-41, 2002.

[21] M. Fliess et H. Sira-Ramírez, « An algebraic framework for linear identification », *ESAIM Control Optim. Calc. Variat.*, vol. 9, pp. 151-168, 2003.

[22] M. Fliess et H. Sira-Ramírez, « Reconstructeurs d'états », *C.R. Acad. Sci. Paris*, vol. I-338, pp. 91-96 2004.

[23] M. Fliess et H. Sira-Ramírez, « Control via state estimations of some nonlinear systems », *Proc. Symp. Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2004)*, Stuttgart, 2004 (accessible sur `http://hal.inria.fr/inria-00001096`).

[24] T. Floquet et J.P. Barbot, « State and unknown input estimation for linear discrete-time systems », *Proc. 16th IFAC World Congr. Automat. Control*, Prague, 2005.

[25] T. Floquet et J.P. Barbot, « An observability form for linear systems with unknown inputs », *Internat. J. Control*, vol. 79, pp. 132-139, 2006.

[26] D. Gleason et D. Andrisani, »Observer design for discrete systems with unknown exogenous inputs », *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 35, pp. 932-935, 1990.

[27] R. Guidorzi et G. Marro, « On Wonham stabilizability condition in the synthesis of observers for unknown-input systems », *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 16, pp. 499-500, 1971.

[28] M.L.J. Hautus, « Strong detectability and observers », *Lin. Alg. Appl.*, vol. 50, pp. 353-368, 1983.

[29] G. Hostetter et J.S. Meditch, « Observing systems with unmeasurable inputs », *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 18, pp. 307-308, 1973.

[30] M. Hou et P.C. Muller, « Design of observers for linear systems with unknown inputs », *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, pp. 871-875, 1992.

[31] C.D. Johnson, « Accomodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems », *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 16, pp. 635-644, 1971.

[32] C.D. Johnson, « On observers for systems with unknown and inacessible inputs », *Internat. J. Control*, vol. 21, pp. 825-831, 1975.

[33] P. Kudva, N. Viswanadham et A. Ramakrishna, « Observers for linear systems with unknown inputs », *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 25, pp. 113-115, 1980.

[34] S. Lang, *Algèbre* (traduit de la 3^{e} éd. révisée américaine), Dunod, Paris, 2002.

[35] B. Marinescu et H. Bourlès, « The exact model matching problem for linear time-varying systems : an algebraic approach », *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 48, pp. 166-169, 2003.

[36] B.J. Miller et R. Mukunden, « On designing reduced-order observers for linear time-invariant systems subject to unknown inputs », *Internat. J. Control*, vol. 35, pp. 183-188, 1982.

[37] G. Millerioux et J. Daafouz, « Unknown input observers for switched linear discrete time systems », *Proc. Amer. Control Conf.*, Boston, 2004.

[38] G. Millerioux et J. Daafouz, « Unknown input observers for message-embedded chaos synchronization of discrete-time systems », *Internat. J. Bifurc. Chaos*, vol. 14, pp. 1357-1368, 2004.

[39] J. Rudolph, « Duality in time-varying linear systems: a module theoretic approach », *Linear Alg. Appl.*, vol. 245, pp. 83-106, 1996.

[40] J. Rudolph, *Beiträge zur flacheitsbasierten Folgeregelung linearer und nichtlinearer Syteme endlicher und undendlicher Dimension*, Shaker Verlag, Aix-la-Chapelle, 2003.

[41] M.K. Sain et J.L. Massey, « Invertibility of linear time-invariant dynamical systems », *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 14, pp. 141-149, 1969.

[42] L.M. Silverman, « Inversion of multivariable linear systems », *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 14, pp. 270-276, 1969.

[43] H. Sira-Ramírez et S. Agrawal, 2004, *Differentially Flat Systems*, Marcel Dekker, New York, 2004.

[44] E.D. Sontag, *Mathematical Control Theory*, 2^{e} éd., Springer, Berlin, 1998.

[45] S.-H. Wang, E.J. Davison et P. Dorato, « Observing the states of systems with unmeasurable disturbances », *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 20, pp. 716-717, 1975.

[46] F. Yang et R.W. Wilde, « Observers for linear systems with unknown inputs », *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 33, pp. 677-681, 1988.

[47] D.C. Youla et P. Dorato, « On the inverse of linear dynamical systems », Polytechnic Institute of Brooklyn, N. Y., Electrophysics Memo pibmri-1319-66 edition, 1966 (voir aussi P. Dorato, *IEEE Trans. Syst. Sci. Cyber.*, vol. 5, pp. 43-48, 1969).